

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

JUNIO 1947 — ENTREGA VI — TOMO CXLIII

SUMARIO

BUENOS AIRES
CALLE SANTA FE 1145

1947

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escritos. Tienen derecho a la corrección de dos pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Artº 10 del Reglamento de los "ANALES" (modificado por la J. D. en su sesión de fecha 4 de septiembre 1941). Los escritos originales destinados a la Dirección de los "Anales", serán remitidos a la Administración de la Sociedad, calle Santa Fe 1145, a los efectos de registrar la fecha de entrega para luego enviarlos al señor Director. La Sociedad no tomará en consideración las observaciones de los autores que se refieran a cualquier anormalidad, si no se ha cumplido con el requisito indicado.

Impreso en los Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 311-325 - Buenos Aires

PRESENCIA DE LAGARTOS DEL GÉNERO « TUPINAMBIS » EN LA FAUNA PLIOCENA CHAPADMALALENSE

POR

LUCAS J. KRAGLIEVICH

La existencia de lagartos emparentados con el actual *Tupinambis* fué señalada, para el Plioceno argentino, por Cayetano Rovereto en su obra de 1914 sobre los estratos araucanos y sus faunas extinguidas (1). Fundó en esa oportunidad el eminente paleontólogo italiano varias especies que incluyó en dicho género y que denominó *T. preteguixin*, *T. prerufescens*, *T. brevirostris* y *T. multidentatus*. Para cada una de ellas señaló las diferencias que las separaban de las actuales *T. teguixin* y *T. rufescens*, consignando además algunas dimensiones e ilustrando el material descripto.

Todos estos restos de pequeños reptiles procedían del nivel geológico Hermosense de la Formación Araucoentrerriana, de edad Pliocenio inferior. Las íntimas e innegables vinculaciones faunísticas y estratigráficas que existen entre el mencionado horizonte Hermosense de Monte Hermoso (a 60 Km al Este de Bahía Blanca, sobre la costa atlántica de la provincia de Buenos Aires) y el piso Chapadmalalense que aflora en las barrancas costeras extendidas entre Miramar y Mar del Plata, también en el litoral bonaerense, hacen que sea perfectamente lógica la existencia, en el segundo de los niveles nombrados, de integrantes del Orden *Lacertilia* que, como lo demostró Rovereto, estuvo bien representado en el Hermosense. Es un ejemplo más de comunidad faunística entre ambos horizontes, que podemos agregar a los numerosos casos plenamente constatados en otras oportunidades por diversos investigadores de nuestras faunas extinguidas. Últimamente he tenido la satisfacción de ocuparme de un fenómeno análogo, el de la supervivencia hasta

(1) Rovereto, Cayetano. — « Los estratos araucanos y sus fósiles », en *Anales del Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires*, t. XXV, Buenos Aires, 1914. Cfr. pp. 172-175, lám. XXV, figs. 4, 4 *a*, 5-5 *d*, 6-11.

el Chapadmalalense de las gigantescas y rapaces aves de la familia *Mesembriornithidae,* representadas en el Hermosense por la especie *Mesembriornis milneedwardsi* Mor.

Cada nuevo descubrimiento de esta índole va afianzando paulatinamente las relaciones entre las faunas Hermosense y Chapadmalalense, al punto que se hace ya muy difícil admitir el criterio de algunos investigadores que, habiendo sostenido hace tiempo la idea de que ambos pisos ocupaban la base de la Formación Pampeana y del Pleistoceno, piensan ahora que mientras el Hermosense corresponde a la cúspide del Araucano (Plioceno) el Chapadmalalense representa el más antiguo Pleistoceno y la primer fase sedimentaria del Pampeano. En cierto modo, era más lógica la posición adoptada anteriormente (aunque no la comparto en ningún modo) porque por lo menos no destruía la incuestionable unidad faunística y estratigráfica que existe entre los dos horizontes, pero ahora no podemos, sin contrariar de manera muy evidente a los argumentos geopaleontológicos, separar los dos niveles en Formaciones y períodos distintos, cuando sus faunas ofrecen una abrumadora comunidad genérica. A lo sumo, podemos afirmar que el Hermosense es algo más antiguo que el Chapadmalalense, sin sacarlos, empero, de la serie Araucoentrerriana y del Plioceno, que es donde deben permanecer por todos sus caracteres.

Ya insistiremos en otra oportunidad sobre este tema, y demostraremos que las correlaciones por nosotros sostenidas no se basan en un mero cálculo porcentual de géneros y especies sino en afinidades zoológicas bien evidentes y en argumentos estratigráficos y tectónicos que las complementan y las comprueban.

El lagarto de que hice mención en las páginas precedentes, está representado por una rama mandibular izquierda bastante bien conservada, aunque le faltan la porción posterior al coronario, con el *articulare,* parte del *angulare* y *surangulare* y también los cuatro dientes siguientes al primero. La pieza pertenece a la colección Reig, en la que está catalogada con el número 735.

El hallazgo lo hice personalmente en febrero del año próximo pasado, en la localidad bonaerense de Miramar, cuyas clásicas barrancas costeras parecen estar dispuestas a depararnos siempre toda clase de novedades y descubrimientos interesantes. La rama mandibular se encontró en el extremo sur de la llamada « Barranca Parodi », entre Baliza Chica y Arroyo Brusquitas, al lado del lugar

en que el Dr. Santiago Roth mandó practicar la famosa excavación que lleva su nombre. Estaba contenida en una capa de arcilla verdosa muy rica en fósiles que corresponde al Chapadmalalense y, está, allí, expuesta en la parte superior de la barranca, por lo que la denudación pluvial hace aparecer siempre nuevos restos, aunque fragmentados en general. Junto con la mandíbula de *Tupinambis* hallé en esa y otras oportunidades huesos y dientes de *Dicoelophorus, Proaguti, Microcavia, Dolicavia, Lagostomopsis* y *Paedotherium,* géneros que por sí solos demuestran la antigüedad del estrato. La posición de éste es más bien moderna dentro del complejo Chapadmalense, correspondiendo a una de las últimas fases sedimentarias del mismo.

La rama mandibular, como veremos, ofrece ciertas diferencias morfológicas comparada con las especies hermosenses y actuales, lo que unido a la distinta procedencia estratigráfica y ubicación cronológica, me obliga a separarla en una nueva especie para la que propongo el nombre de *Tupinambis onyxodon* n. sp. Los dibujos son del autor.

Superorden *Lepidosauria*
Orden LACERTILIA
Suborden *Lacertae*
Fam. Teiidae
Gen. *Tupinambis* Daud.
Tupinambis onyxodon (1) n. sp.

Tipo: Rama mandibular izquierda sin la parte posterior y los cuatro dientes que siguen al primero, Nº 735 del Catálogo de la Colección REIG.

Diagnosis específica: tamaño semejante al de *T. preteguixin* Rov.; diez y ocho dientes mandibulares, los medianos grandes y unciformes y los posteriores de tamaño decreciente y redondeados; mandíbula robusta y suavemente arqueada de adelante atrás.

Horizonte: Chapadmalalense, Plioceno medio.

Localidad típica: Barrancas costeras entre Baliza Chica y la desembocadura del Arroyo Brusquitas, 5 Km al N.E. de Miramar, Pcia. de Buenos Aires.

(1) *onyxodon,* de ὄνυξ, uña, y ὀδών, diente, aludiendo a algunos dientes que son unciformes.

Descripción: la rama mandibular es, en su contorno general, semejante a la de *T. preteguixin* figurada por Rovereto (op. cit., lám. XXV, fig. 5 *c*) y perteneciente a un individuo joven; en cambio, comparada con la de la misma especie pero de un ejemplar adulto (op. cit., lám. XXV, fig. 4) resalta inmediatamente la diferencia de tamaño, ya que nuestra mandíbula es de menores dimensiones. Es necesario aclarar, por otra parte, que pertenece a un individuo incompletamente desarrollado. Cotejándola con la rama mandibular de *T. prerufescens* (op. cit., lám. XXV, fig. 9), la mandíbula de *onyxodon* resulta ser más robusta y alta, ofreciendo también mayores dimensiones. Es en cambio algo menos robusta que la de *T. multidentatus* (op. cit., lám. XXV, fig. 10), especie de la que se diferencia principalmente por la fórmula dentaria. Con *T. brevirostris* (op. cit., lám. XXV, figs. 8 y 11) las diferencias son más considerables, pues esa especie se caracteriza por su rostro corto y por la robustez y altura de la rama mandibular, mientras *onyxodon* posee una rama mandibular más bien grácil y alargada. La cara

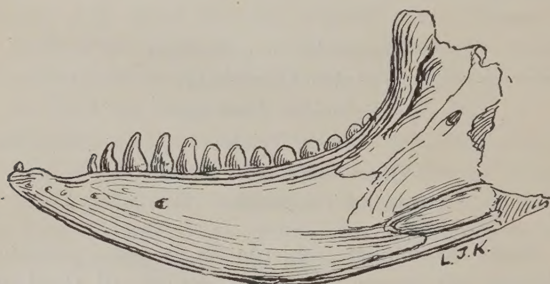


FIG. 1. — Rama mandibular izquierda, tipo, de *Tupinambis onyxodon* n. sp., vista por su cara externa. Col. K. - R. Nº 735 × 4/3.

externa (fig. 1) es bastante convexa en sentido súperoinferior y presenta cinco pequeños forámenes nutricios; los tres anteriores son pequeños y están cercanos entre sí, luego viene un cuarto foramen algo mayor colocado al nivel del sexto diente y el más posterior, que es el mayor de todos, está situado a nivel del noveno diente. En sentido anteroposterior la rama es de superficie casi plana, con una imperceptible concavidad hacia afuera. En la región aboral de la cara externa se observan las suturas entre los huesos *angulare*, *surangulare* y coronario. El proceso ascendente es robusto, más que

en el ejemplar joven de *preteguixin* figurado por Rovereto y que ya mencionamos. Presenta externamente algunas rugosidades y además se observa una cresta bien marcada que lo recorre, atrás, de arriba abajo. Sobre la superficie del *surangulare* se nota un foramen nutricio bastante grande.

El borde inferior de la rama mandibular es fuerte y bien convexo, notándose la proyección en forma de aguja, hacia adelante, del surangular.

La cara interna está deprimida medialmente por una excavación longitudinal. A la altura del duodécimo diente se observa un agujero notorio que se abre en la superficie del *spleniale*. En la parte posterior se encuentra fracturada. Internamente, el proceso ascendente presenta una excavación limitada atrás por una fuerte cresta.

La serie dentaria consta de diez y ocho dientes, dos más que en las especies actuales, *teguixin* y *rufescens* y que en las extinguidas *preteguixin*, *prerufescens* y *brevirostris* y dos menos que en *multidentatus*. El primer diente, que se conserva algo roto, es un pequeño vástago colocado en la parte más anterior de la sínfisis. Los cuatro siguientes no se han conservado, pero están sus alvéolos: los correspondientes al segundo y tercero son grandes circulares. El sexto es pequeño y puntiagudo, siendo los tres que siguen los más altos de la serie, unciformes y con la punta dirigida hacia atrás y un poco adentro. Los restantes van decreciendo en el tamaño y haciéndose más redondeados y cilíndricos. El último diente es pequeño y algo puntiagudo, estando situado ya sobre el borde anterior de la base del proceso ascendente. La diferencia numérica en la fórmula dentaria entre *onyxodon* y las demás especies constituye a mi juicio el más importante carácter diagnóstico de esta nueva especie.

DIMENSIONES (1)

	Tupinambis onyxodon n. sp.	*T. teguixin*	*T. preteguixin*	*T. prerufescens*
Longitud de la mandíbula	80 (calc.)			—
Longitud de la parte conservada ...	63	—	—	—
Altura sobre el proceso ascendente ..	27,2	—	—	—
Altura al nivel del octavo diente ...	9	—	—	—
Altura al nivel del último diente ...	16,4	19,5	18	13
Longitud de la serie dentaria	42,3	50	46,5	43

(1) Las dimensiones están consignadas en milímetros.

RESISTENCIA A LAS HELADAS DE ALGUNOS SOLANUM (TUBERARIUM) ARGENTINOS

POR

ENRIQUE L. RATERA [1]

Con el descubrimiento de nuevas especies silvestres y cultivadas de papas en América del Sud por expediciones realizadas especialmente por los rusos e ingleses, se comenzaron a estudiar los caracteres de las mismas y es así cómo se encontró que algunas de ellas eran resistentes a las enfermedades de virus, otras a las heladas, etc. Casi simultáneamente en distintos institutos europeos y norteamericanos se empezó a trabajar con la finalidad de incorporar esos valiosos caracteres a las variedades cultivadas de *Solanum tuberosum* L.

Encontramos datos que se refieren a la resistencia que presentan a las heladas, las especies silvestres y cultivadas de papas, en los trabajos de Reddick (1930), Bukasov (1933, 1941), Pissarev (1933), Bukasov y Lechnovitz (1935), Stevenson y Clark (1937), Stelzner (1938), Hawkes (1945), etc.

Entre las especies y variedades de papas que presentan un alto grado de resistencia a las heladas, podemos citar las siguientes [2]:

Solanum Abbotianum Juz.
Solanum acaule Bitt.
Solanum acaule Bitt. var. *subexinterruptum* Bitt.
Solanum acaule Bitt. var. *checcae* Hawkes
**Solanum ajanhuiri* Juz. et Buk.
**Solanum andigenum* Juz. et Buk.
Solanum Bukasovii Juz.
Solanum Commersonii Dunal

[1] Ingeniero Agrónomo. Jefe de la Sección Papas del Instituto de Genética de la Facultad de Agronomía y Veterinaria de Buenos Aires.

[2] El asterisco indica que esa especie o variedad, es cultivada.

Solanum curtilobum Juz. et Buk.
Solanum demissum Lindl.
Solanum depexum Juz.
Solanum depexum Juz. var. *chorruense* Hawkes
Solanum edinense Berth.
Solanum Juzepczukii Buk.
Solanum Juzepczukii Buk. var. *parco* Hawkes
Solanum Ohrondii Carr.
Solanum Millanii Buk. et Lechn.
Solanum pampasense Hawkes
Solanum stenotomum Juz. et Buk. [3]

De todas estas especies, encontramos en nuestro país las siguientes: *S. acaule*, *S. andigenum*, *S. Commersonii*, *S. depexum* y *S. Millanii*.

En esta nota nos ocuparemos de la resistencia que presentan a las bajas temperaturas, algunas especies argentinas de papas silvestres cultivadas a pleno campo [4].

[3] Solamente dos clones demostraron ser resistentes a las heladas.

[4] Las experiencias se realizaron en el Campo Experimental del Instituto de Genética de la Facultad de Agronomía y Veterinaria de Buenos Aires, cuyas principales características son las siguientes:

Localidad: Villa Ortúzar, Capital Federal.

Posición geográfica:

Longitud W de G: 58° 22′.
Latitud S: 34° 36′.
Altitud sobre el nivel del mar: 25 m.

Datos climáticos:

Isohieta anual: 1.013,1 mm.
Humedad relativa media: 76,1 %.
Isoterma anual: 16° 2.
Isoterma de verano (isótera): 22° 0.
Isoterma de otoño: 13° 4.
Isoterma de invierno (isoquímena): 10° 9.
Isoterma de primavera: 18° 5.
Número de meses sin heladas: normalmente 6 meses, desde noviembre hasta abril inclusive.
Mínima minimorum absoluta media: — 1° 8.
Insolación: 2.645 horas.

Estos datos han sido extraídos de la Circular Técnica N° 1 de la Cátedra de Agricultura especial. Universidad de Buenos Aires. Facultad de Agronomía y Veterinaria.

Especies estudiadas[5]	Procedencia
Solanum Commersonii Dun.	Buenos Aires
» *chacoense* Bitt.	» »
» *Garciae* Juz. et Buk.	Córdoba
» *gibberulosum* Juz. et Buk.	»
» *Henryi* Buk. et Lechn.	Buenos Aires
» *Horovitzii* Buk.	Salta
» *Millanii* Buk. et Lechn.	Misiones
» *Parodii* Juz. et Buk.	Tucumán
» *subtilius* Bitt.	»

En un trabajo anterior (Ratera, 1938), al referirnos al valor agrícola de algunas de estas especies, al tratar la resistencia a las heladas señalamos como resistentes al *S. Millanii* y a un *S.* (*Tuberarium*), que posteriormente identificamos como *S. Commersonii*, y no resistente al *S. laplaticum* Buk.

Con respecto a las demás especies estudiadas dejamos constancia de que « como las observaciones fueron hechas con plantas cultivadas a pleno campo, en muchos casos no fué posible determinar este carácter, por tratarse de especies que escapan a las primeras heladas por cumplir su ciclo vegetativo principalmente en primavera y el verano ». Por este motivo y como complemento a ese trabajo es que a continuación nos referimos a nuevas observaciones realizadas en esas especies con respecto a la resistencia a las heladas.

Hemos estudiado durante los años 1941-1945, los daños que causaron las bajas temperaturas registradas durante los meses de junio y julio, en el material de ensayo. Con esta finalidad se plantaron a principios de otoño en pleno campo y en macetas[6] tubérculos de las especies de *Solanum* (*Tuberarium*) en estudio. Como resultaría muy extenso dar a conocer todas las observaciones realizadas, indicamos únicamente algunas de las correspondientes a los meses de junio y julio de 1945 y cuyos resultados coinciden con las efectuadas en otros años.

[5] Un estudio sistemático de las mismas demostraría que en realidad algunas de estas especies son sinónimos o variedades de otras.

[6] Estas macetas se colocaron en el invernáculo del Jardín Botánico de la Facultad de Agronomía y Veterinaria de Buenos Aires y se fueron llevando al campo experimental a medida que se realizaban las observaciones. No encontramos diferencias entre los daños causados por las heladas entre el material cultivado a pleno campo y el de las macetas.

Especie	Temperatura mínima [7]	Fecha (1945)	Daños [8]
S. Commersonii	1,1° C	Junio 21	A
» »	0,1° C	Julio 8	A
» »	—0,8° C	Junio 25	B
» »	—2,0° C	Julio 10	C
» »	—3,5° C	Junio 24	E
S. chacoense	1,1° C	Junio 21	B
» »	0,1° C	Julio 8	C
» »	—8,0° C	Junio 25	D
» »	—2,0° C	Julio 10	E
S. Garciae	1,1° C	Junio 21	B
» »	0,1° C	Julio 8	C
» »	—0,8° C	Junio 25	D
» »	—2,0° C	Julio 10	E
S. gibberulosum	1,1° C	Junio 21	B
» »	0,1° C	Julio 8	C
» »	—0,8° C	Junio 25	D
» »	—2,0° C	Julio 10	E
S. Henryi	1,1° C	Junio 21	A
» »	0,1° C	Julio 8	B
» »	—0,8° C	Junio 25	C
» »	—2,0° C	Julio 10	E
S. Horovitzii	1,1° C	Junio 21	A
» »	0,1° C	Julio 8	B
» »	—0,8° C	Junio 25	C
» »	—2,0° C	Julio 10	E
S. Millanii	1,1° C	Junio 21	A
» »	0,1° C	Julio 8	A
» »	—0,8° C	Junio 25	B
» »	—2,0° C	Julio 10	C
» »	—3,5° C	Junio 24	E
S. Parodii	1,1° C	Junio 21	A
» »	0,1° C	Julio 8	B
» »	—0,8° C	Junio 25	C
» »	—2,0° C	Julio 10	E
S. subtilius	1,1° C	Junio 21	A
» »	0,1° C	Julio 8	B
» »	—0,8° C	Junio 25	C
» »	—2,0° C	Julio 10	E

[7] Datos suministrados por el Sr. M. CONCHADO BRAVO, del Observatorio Central de Buenos Aires (Villa Ortúzar).

[8] *Daños*: A: sin efecto.
B: ligeros daños en los botones florales y en flores.
C: daños en los botones florales, flores, hojas y tallos.
D: intensos daños en toda la parte aérea de la planta.
E: destrucción completa de toda la parte aérea de la planta.

De todas las observaciones realizadas deducimos que:

a) Con temperaturas de 1,1° C observamos daños en los botones florales y flores en *Solanum chacoense*, *S. Garciae* y *S. gibberulosum*.

b) *S. Millanii* y *S. Commersonii* toleran bien temperaturas de 0,1° C, mientras que las demás especies en estudio presentan con esta misma temperatura daños en los botones florales, flores y en algunas, daños en las hojas y tallos.

c) Con temperaturas de — 0,8° C observamos daños o ligeros daños en todas las especies en estudio.

d) Con temperaturas de — 2,0° C notamos intensos daños en las especies en ensayo, observándose la destrucción de las partes aéreas en *S. chacoense*, *S. Garciae*, *S. gibberulosum*, *S. Horovitzii*, *S. Henryi*, *S. Parodii* y *S. subtilius*.

e) La destrucción completa de las partes aéreas de *S. Commersonii* y *S. Millanii* las observamos con temperaturas de — 3,5° C [9].

f) Hemos observado también que la resistencia que presenta *S. Millanii* a las bajas temperaturas, disminuye a medida que aumenta la edad de la planta.

g) Hemos tenido oportunidad de comprobar que el daño causado por una helada en el material en estudio depende de la especie y variedad considerada, del estado de vegetación (reposo, brotación y floración) y de los órganos considerados (hojas, flores, frutos, etc.) (De Fina, 1935).

Resumen

Se estudió la resistencia a bajas temperaturas que presentan las siguientes especies de *Solanum* (*Tuberarium*) argentinos: *S. Commersonii* Dunal, *S. chacoense* Bitt., *S. Garciae* Juz. et Buk., *S. gibberulosum* Juz. et Buk., *S. Henryi* Buk. et Lechn., *S. Horovitzii* Buk., *S. Millanii* Buk. et Lechn., *S. Parodii* Juz. et Buk., *S. sub-

[9] Según Kemeraz citado por Hawkes (1945) *S. Commersonii*, *S. Millanii* y *S. Henryi*, toleran temperaturas de — 3° C hasta — 5° C. Con respecto a *S. Commersonii* debemos recordar que Reddick (1930) llama la atención sobre la resistencia a las heladas observadas en material de *S. Commersonii* procedente de Montevideo y la no tolerancia en material procedente de otros lugares, aunque probablemente no se trate de esta especie sino de *S. Henryi* que es muy semejante a *S. Commersonii* y que de acuerdo a nuestras observaciones no soporta temperaturas muy bajas.

tilius BITT., cultivadas en las condiciones naturales del Campo Experimental del Instituto de Genética de la Facultad de Agronomía y Veterinaria de Buenos Aires.

De los estudios realizados se deduce que *S. Commersonii* y *S. Millanii* son las especies que soportan mejor las bajas temperaturas.

BIBLIOGRAFÍA CITADA

BUKASOV, S. M. 1933. — *The potatoes of South America and their breeding possibilities.* Suppl. 58 *Bull. Appl. Bot.* Leningrad. 1 vol. de 192 páginas.

BUKASOV, S. M. y V. LECÑNOVITZ. 1935. — *Importancia en la fitotecnia de las papas indígenas de la América del Sur. Rev. Arg. de Agronomía* **2** (7): 173:183. Buenos Aires.

BUKASOV, S. M. 1941. — *The geography of the endemic potatoes of South America. Rev. Arg. de Agronomía* **8** (2): 83-104. Buenos Aires.

DE FINA, A. L. 1935. — *Las heladas primaverales en Buenos Aires durante el período* 1909-1933. *Rev. Arg. de Agronomía* **2** (6): 57-77. Buenos Aires.

HAWKES, J. G. 1945. — *The indigenous american potatoes and their value in plant breeding. The Empire Journal of Experimental Agriculture* **13** (49): 11-40. England.

PISSAREV, V. 1933. — *Kartoffelselektion auf Kälteresistenz. Z. Pflanzenzüchtung* **18**: 582-594. Berlín.

RATERA, E. L. 1938. — *Valor agrícola de algunas especies indígenas de Solanum (Tuberarium) de la República Argentina. Rev. Fac. Agr. y Vet. Bs. As.* **9** (1): 23-29.

REDDICK, D. 1930. — *Frost-tolerant and blight-resistant potatoes. Phytopathology* **20**: 987-991. Lancaster. Pennsylvania.

STELZNER, G. 1938. — *Künstliche Selektionsmethoden zür Züchtung frostharter Kartoffeln. Der Züchter* **10** (9-11): 271-275. Berlín.

STEVENSON, F. J., and C. F. CLARK. 1937. — *Breeding and Genetics in Potato Improvement. Yearbook of Agriculture.* Pp. 405-444. Washington.

Buenos Aires, marzo de 1946.

SECCION CONFERENCIAS

LA CONTRIBUCION DE FRANCIA A LAS CIENCIAS EXACTAS

POR EL

Dr. CARLOS BIGGERI

El 19 de Junio de 1945, el Dr. Carlos Biggeri pronunció en la Sociedad Científica Argentina una conferencia con el tema del epígrafe. Coincidía la fecha con la presencia en Buenos Aires de la Embajada Intelectual francesa, presidida por el Profesor Pasteur Vallery-Radot, la misión económica que presidía el Dr. Jean Fréderic Bloch Laine, y con la llegada del nuevo Encargado de Negocios de Francia, Mr. Pigeonneau, todos los cuales fueron especialmente invitados al acto, que adquiría así los perfiles de un homenaje a la ciencia francesa.

La tardanza del Dr. Biggeri en entregar los originales de su conferencia, y la forma fraccionaria e incompleta con que lo hizo, impidieron su publicación en tiempo oportuno. Lo hacemos ahora, para no dilatar más la divulgación de unas páginas que presentan evidente interés, desde el punto de vista histórico, con que se examinan algunos de los más importantes problemas matemáticos estudiados y resueltos por los sabios franceses.

El Vice-Presidente 1º ingeniero Enrique Chanourdie, presentó al conferenciante, destacando su actuación anterior y recordando que en 1936, el Dr. Biggieri fué becado por la Comisión Nacional de Cultura, para realizar investigaciones en París sobre « teoría de las funciones », asistiendo con tal motivo a los cursos de Seminario que en el Colegio de Francia y de la Sorbona, dictaban los afamados profesores Picard, Borel, Hadamard, Lebesgue y Montel, entre otros.

A continuación transcribimos algunos párrafos de las palabras preliminares del ingeniero Chanourdie, y la parte principal de la conferencia del Dr. Biggeri.

Fragmentos de las palabras pronunciada por el ingeniero Chanourdie antes de la conferencia.

. . . .

La feliz circunstancia de hallarse en estos momentos en Buenos Aires, la misión científica Vallery-Radot y la económica que preside el Doctor Jean Fréderic Bloch Laine cuya llegada ha coincidido con la del nuevo Encargado de Negocios de Francia, M. Pigeonneau, abonan la oportunidad de este acto, destinado a honrar al genio francés en sus valores más representativos en el orden científico. Y nos permiten celebrar el que hayan, al fin, terminado los años de congoja que tan abatidos tuvieron los ánimos de los admiradores del espíritu galo, temerosos de que fuesen interminables las angustias de la noble Francia, oprimida y deprimida por un invasor implacable; si bien es cierto que eran legión, los que no podían hacerse a la idea de un eclipse definitivo del foco máximo de las libertades y de los derechos del hombre. De mí sé decir, que la fe en el resurgimiento de Francia no me abandonó en ningún momento, porque confortaba mi ánimo, entre otras muchas causales, el recuerdo de esta expresión de Renán en otros tristes momentos de la historia de su Patria:

> « *¡Pauvre France!, mais il est impossible*
> *qu'elle périsse; elle a été trop aimée* ».

La predicción de Renán se ha cumplido. Francia no ha perecido; ni ha perecido, ni perecerá, porque no es concebible un mundo falto de su espíritu animador, complejo de tantas superioridades entre las que se destaca su lengua « cálida como el vino y la sangre de Galia » según la calificara Jules Claretie en uno de sus discursos académicos. Francia no puede perecer, repito, parodiando a Renán, porque además de ser indispensable su colaboración orientadora en la obra de la civilización progresiva mundial, ha sido, es y seguirá siendo amada en todas las latitudes de la Tierra.

. . . .

Se ha dado en decir que, como consecuencia de los extraordinarios sucesos mundiales de los últimos tiempos, los pueblos que estuvieron a punto de ser dominados por opresores materialistas,

vuelven los ojos hacia este Continente Americano, donde parece haberse advertido el predominio de un nuevo espíritu de esencia idealista susceptible de ser factor concurrente eficaz de una mejor vida de relación entre los pueblos. Sea cual fuere el grado de fundamento de tan singular pretenso apotegma, de tener él alguno nada extraño sería que uno de los principales factores radicase en causas conexas con las cualidades del espíritu latino, magnificadas por la influencia del genio francés que tanta ha tenido en nuestro Continente, desde Quebec hasta el Río de la Plata. Y no sería difícil que ese espíritu —que ojalá arraigue en forma más decisiva en América— fuese consecuencia de una cultura franco-americana irradiada desde la tierra donde abundan los clásicos y los sabios cuyo prototipo es el gran Pasteur, el insuperable investigador capaz de abnegaciones como la de abandonar, durante cinco largos años, sus estudios predilectos sobre las fermentaciones, para ir a una región que le era hasta cierto punto extraña, a descubrir el flagelo que arruinaba a la sericicultura.

Son numerosos, señores, los sabios de esa estirpe, maestros en todas las ramas de las ciencias humanas, que forman el acervo científico de Francia. Ellos constituyen una fabulosa riqueza intelectual como lo comprobaréis al escuchar la exposición que va a haceros el Doctor Biggeri poniendo de manifiesto la influencia de los filósofos y matemáticos franceses que, desde Descartes a Poincaré, señalaron rumbos y fueron guías seguros en el adelanto de las ciencias matemáticas.

Fragmentos de la conferencia pronunciada por el Dr. Carlos Biaggeri en la Sociedad Científica Argentina el 19 de Junio de 1945.

Historiar la contribución de Francia a las Ciencias Exactas en el breve lapso de una hora es, evidentemente, imposible; aún limitándose a mencionar nombres propios de matemáticos y de teorías, con brevísima indicación del significado de éstas.

Sin embargo, intentaremos bosquejar, a grandes rasgos, las contribuciones características de Francia en el dilatado campo de las matemáticas puras. Indudablemente, incurriremos en omisiones: procuremos que éstas no alcancen a los arquetipos.

La ciencia matemática francesa de los siglos XVII y XVIII tuvo geniales representantes en Descartes, Fermat, Pascal, la dinastía de los Bernoulli, Clairaut, D'Alembert, Maupertius, Lagrange, Laplace, etc. El rasgo característico de estos creadores fué la universalidad de sus concepciones y así se explica que sus obras sean verdaderas enciclopedias matemáticas, en donde la elegancia de los métodos corre pareja con la profundidad de las ideas.

La creación de la geometría analítica por René Descartes constituye una revolución en la Ciencia, que no solamente se refiere a los hechos matemáticos sino también a los métodos, y el espíritu de tal revolución se mantiene vivo a través de toda la Matemática hasta hoy día. En efecto, la adjunción a una curva dada de una cierta ecuación, de modo tal que, las propiedades (geométricas) de la curva se *reflejan* en las propiedades (analíticas) de la ecuación y viceversa, constituye un primer ejemplo de ese *dualismo* que se ve en las matemáticas puras y aplicadas (y hasta en la física matemática), dualismo consistente en reducir un concepto a otro de naturaleza distinta. Es así, como casi dos siglos después de la magna creación cartesiana, otro genial matemático francés, Evariste Galois, resuelve, operando en virtud del dualismo mencionado, el difícil problema (cuyo planteo databa de más de trescientos años) de la resolubilidad de las ecuaciones algebraicas mediante radicales: dada una ecuación algebraica, la teoría de Galois, le adjunta un cierto grupo de sustituciones entre los coeficientes, de modo que, las propiedades de las raíces de la ecuación (precisamente, sus expresiones algorítmicas, en forma finita, mediante funciones algebraicas irracionales explícitas de los coeficientes) se *reflejan* en las propiedades del grupo, y viceversa. Asimismo, otra manifestación explícita del dualismo aludido se realiza en la segunda mitad del siglo pasado, cuando otro genial geómetra francés, Émile Picard, resuelve, siguiendo las huellas de Galois (extrapolando al continuo los fecundos raciocinios que éste bosquejó en lo discreto), el problema de la integración mediante cuadraturas de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. Se podrían citar muchos ejemplos más del dualismo mencionado.

La geometría analítica, por sí sola, coloca al autor del « Discours sur la méthode », en el cuadriunvirato padre de la Ciencia Moderna, (integrado por Descartes, Newton, Leibniz y Galileo).

Las creaciones matemáticas de Fermat fueron decisivas en los orígenes de la Ciencia Moderna, pero sobre todo, es en la teoría de números donde el genio del magistrado de Tolosa rayó a más altura. Los desarrollos en las demostraciones de los bellos teoremas con los cuales Fermat enriqueció a la « reina de las matemáticas », eran esquemáticos en los manuscritos del genial matemático: signo característico de esos tiempos, en los cuales no existía la organización por el Estado de la enseñanza ni de la investigación científica colectiva, pero tiempos en los que sobraba el talento. Y tal esquematismo alcanza su expresión más absoluta, en el llamado « último teorema de Fermat », ese enigma que resistió a los ataques, con los más potentes instrumentos (y algunos de ellos creados *ad hoc,* como ser, la teoría de los ideales de Kummer) de los más geniales matemáticos, de las más variadas latitudes, en los últimos tres siglos, y que al decir de Gauss, « el príncipe de los matemáticos », tal teorema « parece lanzado como un perpetuo desafío a la inteligencia humana ». Pero no solamente, Pierre de Fermat se limitó a enunciar teoremas sino que sus métodos, como ser el de « la descente infinie », de insuperable elegancia, fueron instrumentos que en manos de sus sucesores en la teoría de números, permitieron lograr resultados de gran belleza y trascendencia.

Además de sus teoremas en la teoría de números, otros títulos de gloria acredita Fermat: baste citar, que, comparte con Blaise Pascal, la creación de la teoría matemática de las probabilidades; que, fué el primero en aplicar la geometría analítica al espacio tridimensional, y, sobre todo que, fué uno de los precursores más sólidos del cálculo diferencial, pues como el mismo Newton lo declara, el método del trazado de las tangentes, a una curva, de Fermat, le sugirió la idea del método del cálculo diferencial.

La contribución matemática de Pascal, el célebre filósofo y escritor de Port Royal, fué muy extensa y variada: algunos redescubrimientos, estudio de ciertas curvas trascendentes, el « hexágono místico », etc. Pero, la creación más original y trascendente de Pascal, fué la del cálculo de probabilidades, teoría cuya importancia se fué acentuando cada vez más hasta llegar a dominar, hoy día, casi todas las ramas de la física y otras ciencias naturales.

En general, la producción matemática francesa de los siglos XVII y XVIII debida a los Bernoulli, Clairaut, D'Alembert, Maupertius, Lagrange, Laplace, etc., consistió en el perfeccionamiento

de los métodos del cálculo infinitesimal, de la geometría analítica, del cálculo de probabilidades, etc., es decir, de las creaciones de Newton, Leibniz, Descartes, Fermat y Pascal, y en la aplicación de esos métodos, de extraordinaria fecundidad, al estudio de los fenómenos naturales, dando, de tal modo, nacimiento a la física matemática, a la mecánica racional y a la mecánica celeste. Asimismo, fueron descubiertos otros capítulos, a propósito de temas de física o de mecánica, siguiendo el modelo clásico, como ser el cálculo de variaciones: los problemas de isoperímetros, de las braquistócronas, de las tautócronas, etc., preocuparon hondamente a los Bernoulli, etc. El célebre « Ars Conjectandi », de Jacques Bernoulli, publicado en 1713, es una obra maestra del cálculo de probabilidades. Muchas aplicaciones de esta teoría, utilizadas hasta el día de hoy, a las matemáticas estadísticas, á la teoría matemática de los seguros, al estudio matemático de la herencia, etc., parten de dicha obra maestra.

El espíritu, más arriba señalado, de las creaciones matemáticas de los siglos XVII y XVIII alcanza su plenitud en Lagrange y en Laplace, quienes publicaron, respectivamente, las famosas « Mécanique Analytique » y « Mécanique Céleste », obras maestras, no solamente por los problemas en ellas resueltos, sino también por los fecundos métodos de investigación que en ellas se dan a conocer. Quizás la influencia de Laplace en las investigaciones ulteriores, fué superior a la de Lagrange: éste era un matemático puro, que se ocupaba de problemas vinculados a la naturaleza, aquél un físico matemático. Y, efectivamente, se puede considerar a Laplace, como el creador de la física matemática, rama de la Ciencia, que en el siglo XIX adquiere extraordinario desarrollo. Cabe además, considerar a Lagrange, (a quien Napoleón Bonaparte calificara de « la haute pyramide des sciences mathématiques »), como creador del cálculo de variaciones, teoría de interés aún hoy día, a pesar de que su creador, en frecuentes momentos de melancolía, hubiera profetizado que bien pronto las matemáticas carecerían de interés.

El siglo XIX registra un cambio fundamental en la dirección de las investigaciones matemáticas. Ya no se cultivará, como en los dos siglos anteriores, la matemática, teniendo en vista cuestiones ligadas a los fenómenos naturales, sino que se atenderá, más bien, a la matemática pura, aunque algunos de sus problemas no tengan

inmediatas aplicaciones prácticas. Los arquetipos de este movimiento revolucionario fueron: el francés Cauchy y el noruego Abel.

La obra que realiza Cauchy es múltiple y toda ella fecunda: es obra de purificación de las teorías acumuladas durante los dos siglos anteriores y es obra de creación.

Los matemáticos de los siglos XVII y XVIII, preocupados como estaban en explorar los riquísimos filones descubiertos por Newton, no se detuvieron a fundamentar con rigor lógico muchas de sus demostraciones, y, a veces, ni siquiera a fijar con precisión los conceptos que manejaban con maestría insuperable. Así, por ejemplo, las series divergentes eran utilizadas, y, con los mismos métodos, al par que las convergentes. Es justicia recordar que, sin embargo, muchas nociones fundamentales del cálculo infinitesimal (como ser la de diferencial), fueron introducidas con precisión y claridad meridiana por Leibniz. Pero, como la formulación de dicho cálculo hecha por Newton (no tan precisa ni tan clara como la de Leibniz), máxime teniendo presente que el sabio inglés fué el primero en ver que la derivación y la integración son algoritmos inversos (y he aquí, justamente, la genial originalidad newtoniana), tenía no solamente interés matemático puro, sino que trascendía al magno problema del universo, y, en general, de la naturaleza, fué tal formulación lo que dominó en los siglos XVII y XVIII.

Como dijimos, una de las obras capitales de Cauchy, fué la de introducir el rigor lógico en el análisis matemático conocido hasta su época. Es así que, por ejemplo, sienta bases sólidas para el estudio de las series convergentes, desterrando a las divergentes (las cuales volverán a repatriarse al análisis, hacia fines del siglo XIX, por obra de Borel, quien, como veremos, en cierto aspecto puede considerarse el discípulo más *integralista* de Cauchy, con su descubrimiento de las funciones cuasianalíticas), define con pleno rigor las nociones de límite, continuidad, derivada, diferencial, integral definida, etc. Introduce las nociones tan importantes de límites de oscilación: límite superior (« la plus grande des limites »), y, límite inferior (« la plus petite des limites »). (Claro está que en estos algoritmos de aproximación, algunos conceptos escaparon a Cauchy, como ser, el de la convergencia uniforme).

Pero, es bien sabido que, la obra de Cauchy no tan sólo se redujo a poner orden y claridad en las teorías matemáticas elabora-

das por los que le precedieron. Sus creaciones originales hacen de Cauchy uno de los matemáticos más grandes de todos los tiempos. Baste citar la teoría de los grupos de sustituciones (admirable coronación del análisis combinatorio) y la teoría de funciones de una variable compleja. La primera alcanza por obra de Galois proyecciones insospechadas en el Álgebra, que con el tiempo se han ido extrapolando mediante la teoría de los grupos de transformaciones a otros campos de las matemáticas puras y aplicadas (ecuaciones diferenciales, las diversas geometrías, teoría de números, hiperálgebras, física matemática, etc., etc.). La segunda es la gloria epónima del siglo XIX: admirable creación donde el espíritu de elegancia y de generalidad de las Matemáticas alcanza su máxima plenitud.

En casi ocho centenares de trabajos da a conocer Cauchy, la teoría de funciones de una variable compleja.

Existen cuatro métodos para estudiar las funciones complejas de variable compleja, a saber: el de Cauchy, el de Riemann, el de Weierstrass y el de Painlevé, (en realidad el de Paul Painlevé está contenido en el de Cauchy, pero lo señalamos especialmente y aparte, porque su técnica le da un aspecto muy particular).

Según Cauchy una función (compleja) de la variable compleja z, es *monógena* en un punto z_0, cuando dicha función (necesariamente continua) posee derivada única en dicho punto z_0. Un punto z_0 es *regular* para una función, cuando existe un cierto entorno de dicho punto z_0, en cuyos puntos todos la función es monógena. Un punto que no es regular se llama *singular,* (un punto singular puede ser *aislado* o *punto de acumulación de puntos singulares aislados o no*). (Los puntos singulares aislados se clasifican en dos categorías, a saber: *polos* y puntos singulares *esenciales* aislados). Una función (compleja) es *holomorfa* o *analítica regular* en un conjunto de infinitos puntos, (generalmente un recinto), cuando todos los puntos de dicho conjunto son regulares para dicha función; en cambio, si en el conjunto hay puntos singulares para la función, se dice, que dicha función es *analítica* en dicho conjunto. Como se ve, la noción de *analiticidad,* según Cauchy, reposa en la de *monogeneidad.*

Para Riemann, el estudio de la función analítica:

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + i \cdot v(x, y) = u + iv,$$

se reduce al del siguiente sistema de ecuaciones lineales en derivadas parciales de primer orden:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\right\}$$

(ecuaciones características de Cauchy-Riemann), o bien, al par de funciones armónicas conjugadas, u y v, (función armónica en un recinto plano, es toda función de dos variables, continua así como sus derivadas parciales, primeras y segundas, que satisface a la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0).$$

Las concepciones de Riemann en la teoría de funciones (así como en otras ramas de las Matemáticas, como ser la teoría de números y la geometría) son de singular trascendencia. A él se debe, entre otros descubrimientos, el estudio de la correspondencia biunívoca e isogonal entre dos recintos planos (transformación conforme) y la introducción de un nuevo ente llamado la « superficie de Riemann de una función analítica » o « riemanniana de una función analítica ». Durante cierto tiempo el estudio de la teoría de funciones según el genial y fecundo método de Riemann no fué apreciado en todo su alcance, en su país natal: la personalidad del rigurosamente lógico Weierstrass había eclipsado, momentáneamente, a la del intuitivo Riemann. El empleo de las riemannianas a diversas cuestiones difíciles de la teoría de funciones, alcanzó en Francia proyecciones insospechadas; ejemplo típico de esto, es la uniformización de las funciones analíticas lograda por Poincaré mediante la introducción de superficies de Riemann de infinitas hojas.

(Considerando clases particulares de funciones analíticas, la uniformización se logra mediante funciones de tipo determinado; tal, por ejemplo, es el caso de las funciones algebraicas. Es así, que se verifican, entre otros, los siguientes teoremas:

1º) toda curva unicursal (curva algebraica de género igual a cero), es uniformizable mediante funciones racionales fraccio-

narias (eventualmente, racionales enteras) de un cierto parámetro;

2º) toda curva algebraica de género igual a uno, es uniformizable mediante funciones elípticas de un cierto parámetro, de tal modo, que a un punto genérico de la curva le corresponde un solo valor del parámetro, haciendo abstracción de múltiplos de los períodos;

3º) toda curva algebraica de género superior, en sentido estricto, a la unidad, es uniformizable mediante funciones fuchsianas de un cierto parámetro.

Relacionados con estos teoremas, caben destacar los siguientes:

4º) la condición necesaria y suficiente para que una curva algebraica sea uniformizable mediante funciones, tales que sus singularidades, en todo el plano completo, son polos, es que el género de dicha curva sea igual a cero;

5º) la condición necesaria y suficiente para que una curva algebraica sea uniformizable mediante funciones, tales que sus singularidades esenciales, en todo el plano completo, son aisladas, es que el género de dicha curva sea igual a uno.

6º) las curvas (algebraicas) de género igual a cero o a uno, son las únicas para las cuales invirtiendo la integral abeliana

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} R(x, y) \, . \, dx = z \, ,$$

se obtienen para x e y funciones uniformes de z, (teorema de Hermite);

7º) las curvas de género igual a cero o igual a la unidad son las únicas para las cuales invirtiendo la integral

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} dx \, . \, e^{\int_{(x_1, y_1)}^{(x, y)} R(x, y) \, . \, dx} = z \, ,$$

se obtienen para x e y funciones uniformes de z, (teorema de Picard).

De los teoremas 4º) y 5º) surge, evidentemente, que es imposible uniformizar una curva algebraica de género igual o mayor que 2, mediante funciones analíticas con singularidades (esenciales) aisladas; y, en efecto: el conjunto de los puntos singulares de las funciones fuchsianas (que son las que uniformizan cualquier

curva algebraica de grado $\geqq 2$, según el tercer teorema), es denso en sí. Además, se ve fácilmente que dicho conjunto es perfecto; y, más aún, dicho conjunto es un cierto recinto (bidimensional) con su contorno. Así, por ejemplo, las funciones modulares elípticas (directas), (de las cuales como veremos más adelante, las funciones fuchsianas constituyen una amplia generalización), tienen como puntos singulares todos los de un cierto semiplano, incluso, como es evidente, su recta límite; y, todo punto de dicha recta límite (que es, simultáneamente, punto de acumulación de puntos regulares y de puntos singulares) se comporta como esencial (no aislado).

Como es sabido, se suele, también, considerar la función modular elíptica directa en un círculo, (mediante una simple transformación conforme se pasa del semiplano al círculo), y, en este caso: todo punto de la circunferencia, (cuyo radio, generalmente, se toma igual a la unidad), punto que es, al mismo tiempo, punto de acumulación de puntos regulares y de puntos singulares, se comporta como una singularidad esencial (claro está, no aislada). Nos hemos referido a las formas canónicas de la función modular elíptica directa, (pues cabría considerar, y en ello no hay ninguna dificultad, a dicha función en otros recintos distintos del semiplano y del círculo).

Análogamente: en una función fuchsiana, todo punto del contorno de su campo de existencia (punto que es de acumulación de puntos regulares y de puntos singulares, simultáneamente) se comporta como esencial no aislado.

No estará demás recordar que el género de una curva algebraica puede definirse de cinco maneras, diferentes en la forma, pero equivalentes, claro está, en el fondo, a saber: la de Riemann, la de Weierstrass, la de Clebsch, la que surge del teorema generalizado de Euler para una variedad poliédrica cerrada, y, aquélla en que interviene el número de integrales linealmente independientes de primera especie sobre la riemanniana.

Antes de cerrar esta disgresión sobre las curvas algebraicas creemos oportuno recordar que, se debe a Klein un modo de representación de las funciones algebraicas, cuyo empleo fué útil a Poincaré en la aplicación de sus funciones fuchsianas a la ecuación célebre:

$$\Delta u = e^u.$$

Tal representación es la superficie de Klein, superficie que comprende como caso particular a la de Riemann; y, he aquí en qué consiste dicha superficie de Klein: sea la curva algebraica

$$(C)\,; \qquad f(x, y) = 0\,.$$

Consideremos, lo que es posible, una superficie (que es la de Klein) cerrada, tal que a todo punto real o imaginario de la curva (C) le corresponda un punto real, y solamente uno, de la superficie. (A un punto doble de la curva (C) le corresponderán dos puntos reales de la superficie, pertenecientes a las dos ramas de la curva (C) que se cortan en el punto doble; etc.).

Poincaré supone, además, que las coordenadas del punto genérico de la superficie de Klein son funciones continuas e indefinidamente derivables, de las coordenadas del correspondiente punto de la curva (C).

Una superficie de Klein se reduce a una de Riemann, cuando aquélla está infinitamente aplastada y se reduce a un cierto número de hojas aplicadas sobre un plano. Las superficies de Klein se clasifican en isótropas y anisótropas. Una superficie de Klein es isótropa si la correspondencia puntual entre la curva (C) y dicha superficie es tal que la correspondencia puntual, que se establece, entre el plano de la variable compleja x y la superficie, es una correspondencia conforme. Schwarz y Klein han probado que toda curva algebraica, propiamente dicha, se puede representar sobre una superficie de Klein isótropa.

Unas palabras más antes de cerrar esta ya larga disgresión. Es sabido que, en la carta que escribió Galois a su amigo Chevalier, la víspera de su muerte material, carta que se ha dado en llamar el testamento científico de Galois, éste hacía alusión a una teoría original, sin ninguna duda tan genial y profunda como sus otras creaciones, teoría que él llamaba de la *ambigüedad,* pero sin dar ninguna referencia *precisa,* que luego permitiera saber en qué consistía.

Como dice Picard, se puede adivinar aproximadamente qué era tal teoría. Ahora bien, aunque, quizás, no hay oficio más arriesgado que el de adivino, no es aventurado suponer que tal teoría de la *ambigüedad* de Galois estaría basada en algo así como la superficie de Riemann. Hay razones para admitir que esta suposición sea verdadera.

Para Weierstrass una función analítica es la suma de una serie de potencias (elemento holomorfo en un punto) y todas sus prolongaciones analíticas. (La función analítica así construída puede resultar uniforme o multiforme. En caso de ser multiforme puede tener un número finito o infinito de determinaciones, y, en este último caso el conjunto de las infinitas determinaciones de la función analítica en un punto es numerable, según un teorema de Poincaré-Volterra). (Conviene tener presente que la noción de prolongación analítica de Weierstrass, ya había sido usada anteriormente por Cauchy, con el nombre de « cheminement », al prolongar el elemento de función analítica-solución de una ecuación diferencial, dado por su teorema de existencia). La teoría de funciones construída según el método de Weierstrass tiene un carácter exclusivamente aritmético y llevado de tal espíritu elimina, este gran lógico, todo vestigio de concepción geométrica, como ser el de integral curvilínea para no apoyarse en la noción de curva. Es evidente que este método aritmético, (« que demuestra pero que no ilumina », según la feliz expresión de un insigne analista italiano), no pudo tener las proyecciones de los métodos de Cauchy y de Riemann. La concepción aritmética de una función analítica también fué desarrollada en Francia, por obra de Charles Méray, y adoptada a fines del siglo pasado (1892) por Hadamard, en su célebre tesis, quien utilizando, entre otras teorías, algunos resultados de Darboux (pero en sentido inverso), inicia el estudio sistemático de las singularidades de las funciones analíticas.

Por lo tanto, la noción de *analiticidad* según Weierstrass reposa en el *desarrollo en serie potencial*. Es elemental la propiedad según la cual toda función analítica según Weierstrass es también función analítica según Cauchy. Durante mucho tiempo se creyó que la recíproca de esta propiedad era cierta, a saber: que la analiticidad según Cauchy implicaba la analiticidad según Weierstrass; de modo que: las dos nociones mencionadas de analiticidad eran equivalentes. (Y hasta hubo quienes intentaron « demostrar » tal equivalencia. Equivalencia que, en general, era admitida por los sucesores de Weierstrass). Correspondió al genio de Borel la gloria de haber demostrado, que la analiticidad según Cauchy es muchísimo más amplia que la analiticidad según Weierstrass, creando la teoría de las funciones cuasi-analíticas, uno de los capítulos más atrayentes de la moderna teoría de funciones. (Como atinadamente observa Den-

joy, se mostró Borel con esta sublime creación, de las funciones monógenas no desarrollables en series potenciales, como el discípulo más fiel de Cauchy). (La teoría de las funciones cuasianalíticas, que se puede, hoy día, encarar desde diversos puntos de vista, presenta interesantes vinculaciones con otros capítulos de capital importancia en el análisis matemático superior). El método de Painlevé para el estudio de las funciones complejas de variable compleja, dado a conocer en memorables trabajos, en particular en sus *Lecciones de Estocolmo,* será bosquejado más adelante. Uno de los principales continuadores en la dirección iniciada por éste fué Boutroux. Tal método plantea ciertos problemas de una dificultad tal que parecen inabordables en el estado actual de la Ciencia.

Sentados sobre sólidas bases los cimientos de la teoría de funciones analíticas, por el genio de Cauchy, los matemáticos del siglo XIX y del XX han llevado esta teoría a un grado tal de desarrollo que es imposible enunciar sus diversos capítulos y sus teoremas más importantes en el breve tiempo de una conferencia.

Otro aspecto de la enorme obra de Cauchy en el análisis matemático es su teorema fundamental sobre las ecuaciones diferenciales ordinarias, dando, bajo ciertas condiciones simples y generales bien precisas, la solución a un viejo y trascendental problema que había sido resuelto por sus antecesores (desde Newton hasta él), solamente en casos particulares. Precisamente, el método de Painlevé para estudiar las funciones analíticas (al cual aludimos hace un rato), consiste en estudiar las ecuaciones diferenciales a las cuales satisfacen dichas funciones.

En efecto, así como por ejemplo la función

$$y = \log x ,$$

(logaritmo neperiano), se puede definir por la ecuación diferencial

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} ,$$

con la condición inicial:

$$(x = 1 , \quad y = 0) ;$$

una función analítica se puede definir por una cierta ecuación diferencial ordinaria fijando convenientemente las condiciones iniciales. Es bien sabido como las propiedades fundamentales de la fun-

ción logarítmica (a saber, el logaritmo de un producto, de un cociente, de una potencia con exponente real o complejo, la función logarítmica no admite un teorema algebraico de adición, su simple periodicidad) pueden determinarse a partir de la definición mediante la anterior ecuación diferencial, o sea, a partir de

$$y = \int_1^x \frac{1}{x} \cdot dx .$$

Asimismo, las principales propiedades de una función analítica pueden determinarse utilizando la ecuación diferencial a la cual satisface dicha función analítica. En este orden de ideas es como encara Painlevé el estudio de las funciones analíticas.

Ahora bien, son los puntos singulares de las ecuaciones diferenciales lo que proporciona los mejores y más precisos informes sobre sus integrales generales. Las singularidades pueden depender o no de las constantes que figuran en las integrales generales: en este último caso los puntos singulares son fijos. *A priori* se pueden determinar los puntos singulares de las integrales de una ecuación lineal. Es sabido, como se pueden estudiar las integrales en el entorno de un punto singular; a saber, la permutación de las integrales alrededor de un punto crítico, la expresión algorítmica (en forma finita) de las integrales mediante las trascendentes clásicas, etc., etc. Así, por ejemplo, en el estudio de la permutación de las integrales alrededor de un punto crítico se obtiene el teorema de Fuchs, que dice: Es condición necesaria y suficiente para que la ecuación lineal

$$y^{(n)} + p_1 \,.\, y^{(n-1)} + \ldots + p_i \,.\, y^{(n-i)} + \ldots + p_n \,.\, y = 0 ,$$

admita n integrales distintas y regulares en el punto a, que el coeficiente

$$p_i \equiv p_i\,(x) ,$$

de la derivada

$$y^{(n-i)} ,$$

sea de la forma

$$p_i \equiv p_i\,(x) = \frac{P_i\,(x - a)}{(x - a)^i} ,$$

siendo

$$P_i\,(x - a) ,$$

una función holomorfa en el punto a.

En el estudio de la expresión algorítmica (en forma finita) de las integrales mediante las trascendentes clásicas, se puede citar como un interesante ejemplo ilustrativo el teorema de Picard, a saber: Si la integral general de una ecuación diferencial lineal y homogénea, cuyos coeficientes son funciones elípticas (con los mismos períodos) de la variable independiente, es una función meromorfa; entonces, esta integral general se puede expresar, en forma finita, mediante las trascendentes de la teoría de las funciones elípticas.

. . . .

Por lo que hemos dicho, es fácil darse cuenta que el método de Painlevé vincula de una manera maestra la teoría de funciones con la teoría de las ecuaciones diferenciales. Así, por ejemplo, Painlevé en su célebre memoria titulada «*Sur les lignes singulières des fonctions analytiques* (publicada en los *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1888), demostró que: las singularidades esenciales de las integrales generales de una ecuación diferencial de primer orden, algebraica respecto de la función y de su derivada son fijas, es decir, dichas singularidades no dependen de la constante arbitraria que figura en la integral general. (Las singularidades variables con la constante arbitraria que figura en la integral general son las polares y los puntos críticos algebraicos). En las ecuaciones diferenciales de orden superior, en sentido estricto, al primero, las singularidades esenciales pueden depender de alguna o de varias o de todas las constantes arbitrarias que figuran en la integral general. Asimismo Painlevé determinó todas las ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$y'' = f(y', y, x),$$

donde $f(y', y, x)$ es racional en y', algebraica en y, analítica respecto de x, y cuya integral es uniforme o, más general, tiene sus puntos críticos fijos.

Boutroux, continuando el estudio de las funciones analíticas en la vía iniciada por Painlevé, en una profunda memoria laureada, en 1912, con el Gran Premio de Ciencias Matemáticas de la Academia de Ciencias de París, obtuvo resultados notables sobre la naturaleza de las trascendentes descubiertas por su maestro, al resolver éste el problema que acabamos de enunciar. Es así que Boutroux partiendo de un conjunto de caracteres funcionales, que pro-

gresivamente va restringiendo, determina y estudia las familias de funciones que verifican una ecuación diferencial algebraica, a las cuales pertenecen tales caracteres. Entre otros, uno de los resultados capitales de Boutroux, es el siguiente: las trascendentes de Painlevé, transformadas mediante la sustitución:

$$\left. \begin{aligned} y &= x^m \cdot y_1 \\ x_1 &= x^l \end{aligned} \right\}$$

y tomando convenientemente los exponentes m y l, son funciones asíntotas a las funciones doblemente periódicas. Tales trascendentes de Painlevé, son a las funciones elípticas lo que las funciones meromorfas de Bessel son a las funciones trigonométricas directas.

Y para terminar estas palabras sobre los puntos singulares de las soluciones de las ecuaciones diferenciales, creemos digno del mayor interés señalar un problema hasta ahora no encarado, y que, evidentemente, reviste grandes dificultades. He aquí, tal problema: Sea la ecuación diferencial de primer orden

$$y' = f(x, y)$$

donde $f(x, y)$ es una función holomorfa del par de variables x e y en el punto $(x = o, y = o)$. Conociendo los conjuntos asociados de singularidades de la función $f(x, y)$, determinar la estructura del conjunto de los puntos singulares de la integral general.

Con lo que hemos dicho, creemos haber dado alguna idea sobre el espíritu de los métodos de Cauchy, Riemann, Weierstrass y Painlevé para encarar el estudio de la teoría de funciones de una variable compleja.

Recalquemos algo respecto del estudio de las ecuaciones diferenciales según el método de Cauchy. El instrumento analítico que utiliza Cauchy es, en esencia, la serie de Taylor, y, las soluciones son consideradas en el campo complejo: la prolongación analítica logra la solución completa.

(Recordemos que, en el caso, llamado *caso de analiticidad*, en que las funciones f_n, que dan las derivadas primeras de las funciones incógnitas y_1, y_2, ..., y_n, siendo x la variable independiente, son holomorfas, la hipótesis fundamental de Cauchy, es que *existe un cierto punto:*

$$(P)\,; \quad x_0, \quad (y_1)_0, \quad (y_2)_0, \ldots, (y_n)_0,$$

en el cual tales funciones f_n son holomorfas.

En tal hipótesis, el método de las mayorantes, de Cauchy, proporciona, mediante la serie de Taylor, la integral particular del sistema dado que satisface a las condiciones iniciales prefijadas. Ahora, si las funciones f_n *no son holomorfas en el punto* (P), pero sí lo son en un cierto entorno de dicho punto, en cuyo caso el teorema de existencia de Cauchy ya no es aplicable, el método de sumación exponencial de las series divergentes debido a Borel encuentra elegante aplicación. Tal método de sumación exponencial se aplica a la solución *formal* dada por Cauchy).

Ahora bien, en una célebre Memoria, publicada en el *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* Poincaré encara el estudio de las ecuaciones diferenciales desde otro punto de vista, (recordemos que este genial geóemtra inició su serie de trabajos sensacionales con uno sobre las propiedades de las funciones definidas por ecuaciones diferenciales, publicado en 1878, en el *Journal de l'École Polytechnique,* en el cual logra perfeccionar los resultados obtenidos por Briot y Bouquet sobre las diferentes soluciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden; y, recordemos, además, que en la tesis, presentada a la Sorbona, en 1878, para graduarse de doctor en ciencias matemáticas, encaró Poincaré la integración de las ecuaciones en derivadas parciales de un número cualquiera de variables independientes, y es en esta tesis que ya aparecen funciones con espacios lagunares y las funciones algebroides). En la memoria aludida más arriba (presentada a la Academia de Ciencias de París en 1880), Poincaré supone que los coeficientes de la ecuación diferencial son funciones reales, y estudia a fondo las curvas reales representativas de las soluciones de la ecuación dada, comenzando por el caso en que la ecuación diferencial es de primer grado. Las curvas soluciones de la ecuación diferencial son de dos categorías: o curvas cerradas o espirales; y las singularidades que pueden poseer tales curvas se clasifican en las cuatro especies siguientes: *cuellos* (*cols*), *nodos* (*noeuds*), *focos* (*foyers*) y *centros* (*centres*). Los cuellos son los puntos por los cuales pasan dos, y solamente dos, curvas soluciones de la ecuación. Los nodos (o nudos) son los puntos donde se cortan infinitas curvas soluciones de la ecuación. Los focos son los puntos asintóticos. Los centros son los puntos en torno de los cuales las curvas se envuelven mutuamente. Es de hacer notar que los centros existen excepcionalmente y en casos muy particulares. Poincaré establece, además de otros

importantes teoremas, entre el número de cuellos, el de focos y el de centros de las curvas en cuestión, una relación análoga a la que dió Euler, entre el número de caras, el de vértices y el de aristas de una superficie poliédrica homeomorfa con una superficie esférica; y este admirable conjunto de resultados los extiende a sistemas cada vez más generales de ecuaciones diferenciales.

En la imposibilidad, por falta de tiempo, de resumir los célebres descubrimientos de Poincaré, sobre este asunto de las soluciones reales de un sistema cualquiera de ecuaciones diferenciales algebraicas con coeficientes reales, refirámosnos al teorema que corona su gloriosa exploración en este hermoso tema, teorema que enunció en una Nota de los *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* en 1882, y que sin duda alguna es uno de los más grandes descubrimientos hechos en el Análisis Matemático durante el siglo XIX. Según este teorema (que el mismo Poincaré aplicó al famoso problema de los tres cuerpos de la mecánica celeste) se tiene que: las *soluciones reales* de un sistema arbitrariamente fijado de ecuaciones diferenciales algebraicas con coeficientes reales, pueden representarse, completamente, por series de potencias de una variable auxiliar real, series convergentes para todo valor de tal variable auxiliar, variable auxiliar que se puede elegir de infinitos modos.

Mediante una sencilla generalización de este teorema de Poincaré, Darboux obtiene el siguiente: *Todas las soluciones de un sistema, arbitrariamente fijado, de ecuaciones diferenciales algebraicas, con coeficientes reales o imaginarios, se pueden, siempre, representar por series potenciales de una variable auxiliar real, con radios de convergencia infinito, si se supone que el afijo de una de las variables describe una curva algebraica, o, más general aún, si se supone que existe una relación algebraica arbitraria entre las partes reales y las partes imaginarias de todas las variables que figuran en el sistema.*

Sería muy largo pasar sumaria revista a los numerosísimos trabajos inspirados en los trascendentales descubrimientos de Poincaré sobre las ecuaciones diferenciales. Algunos de éstos son los que acabamos de bosquejar.

. . . .

Digamos, ahora, algunas palabras sobre otro descubrimiento de capital importancia en la teoría (tan explorada y tan llena, aún

hoy día, de secretos) de las ecuaciones diferenciales, descubrimiento debido al genio de otro francés, el eminente Émile Picard, fallecido hace pocos años; cuya obra inmensa, que versó sobre los más variados temas, es un modelo de profundidad en las concepciones, de clásica elegancia y de claridad en la exposición. Obra que, sin ninguna duda, coloca a su ilustre autor en la categoría de los grandes geómetras de los siglos pasados. El descubrimiento de Picard al que nos referimos es el del método de las aproximaciones sucesivas, (método cuyo estudio y aplicaciones inició en una memoria publicada, en 1890, en el *Journal de Mathématiques*). He aquí, suscintamente, en qué consiste tal método, expuesto, para abreviar, en un caso simple: Sea el siguiente sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden, (recuérdese que un sistema de ecuaciones diferenciales de órdenes cualesquiera se reduce a uno de primer orden):

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= f_1(x, u, v, \ldots, w), \\ \frac{dv}{dx} &= f_2(x, u, v, \ldots, w), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dw}{dx} &= f_n(x, u, v, \ldots, w). \end{aligned}\right\} (S)$$

Supongamos que se verifiquen las dos hipótesis siguientes:

1ª) existe un entorno:

$$(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1), \quad (u_0 - \delta, u_0 + \delta), \quad (v_0 - \delta, v_0 + \delta), \ldots, \quad (w_0 - \delta, w_0 + \delta),$$

del punto:

$$(x_0, u_0, v_0, \ldots, w_0),$$

en el cual las funciones f_n son reales y continuas;

2ª) existe un número real positivo, k, tal que para todo par de sistemas de valores:

$$\left.\begin{aligned} &(x, u', v', \ldots, w') \\ &(x, u, v, \ldots, w) \end{aligned}\right\}$$

de las variables (dependientes o independientes), pertenecientes al entorno anterior, se verifica:

$$| f_i (x, u', v', \ldots , w') - f_i (x, u, v, \ldots , w) | \leqq$$
$$\leqq k (| u' - u | + | v' - v | + \ldots + | w' - w |) .$$

Picard procede de la siguiente manera: parte del sistema

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{du_1}{dx} = f_1 (x, u_0, v_0, \ldots , w_0) \\[2ex] \dfrac{dv_1}{dx} = f_2 (x, u_0, v_0, \ldots , w_0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dw_1}{dx} = f_n (x, u_0, v_0, \ldots , w_0) \end{array}\right\}$$

y considera la siguiente solución particular:

$$u_1 \equiv u_1 (x) = \int_{x_0}^{x} f_1 (x, u_0, v_0, \ldots , w_0) \,.\, dx + u_0 ,$$
$$v_1 \equiv v_1 (x) = \int_{x_0}^{x} f_2 (x, u_0, v_0, \ldots , w_0) \,.\, dx + v_0 ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$w_1 \equiv w_1 (x) = \int_{x_0}^{x} f_n (x, u_0, v_0, \ldots , w_0) \,.\, dx + w_0 .$$

Forma, luego, el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{du_2}{dx} = f_1 (x, u_1, v_1, \ldots , w_1) \\[2ex] \dfrac{dv_2}{dx} = f_2 (x, u_1, v_1, \ldots , w_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dw_2}{dx} = f_n (x, u_1, v_1, \ldots , w_1) \end{array}\right\}$$

y determina la solución (particular), tal que para $x = x_0$, las funciones

$$u_2, v_2, \ldots , w_2$$

valen

$$u_0, v_0, \ldots, w_0;$$

es decir:

$$u_2 \equiv u_2(x) = \int_{x_0}^{x} f_1(x, u_1, v_1, \ldots, w_1) \, . \, dx + u_0,$$

$$v_2 \equiv v_2(x) = \int_{x_0}^{x} f_2(x, u_1, v_1, \ldots, w_1) \, . \, dx + v_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$w_2 \equiv w_2(x) = \int_{x_0}^{x} f_n(x, u_1, v_1, \ldots, w_1) \, . \, dx + w_0.$$

Iterando indefinidamente este simple proceso determina una sucesión de funciones de x, a saber:

$$\{u_p, v_p, \ldots, w_p\}, \quad (p = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots),$$

tales que:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_p}{dx} &= f_1(x, u_{p-1}, v_{p-1}, \ldots, w_{p-1}) \\ \frac{dv_p}{dx} &= f_2(x, u_{p-1}, v_{p-1}, \ldots, w_{p-1}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dw_p}{dx} &= f_n(x, u_{p-1}, v_{p-1}, \ldots, w_{p-1}) \end{aligned}\right\}$$

y:

$$u_p(x_0) = u_0; \quad v_p(x_0) = v_0; \ldots; \quad w_p(x_0) = w_0.$$

Sean: M el máximo de los módulos de las funciones f_n en el entorno recién considerado, y: ε el menor de los dos números

$$\delta_1, \quad \frac{\delta}{M}.$$

En las dos hipótesis que se han estipulado, Picard demuestra que en el intervalo

$$x_0 - \varepsilon \leqq x \leqq x_0 + \varepsilon,$$

existen los límites:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{p \to \infty} u_p = u \equiv u(x), \\ \lim\limits_{p \to \infty} v_p = v \equiv v(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lim\limits_{p \to \infty} w_p = w \equiv w(x) \end{array}\right\}$$

y estos límites son las integrales buscadas del sistema (S).

Las dos hipótesis anteriores fueron ampliadas por el mismo Picard y sus continuadores.

Nos limitamos a exponer, aquí, el célebre método de las aproximaciones sucesivas de Picard en su caso más simple.

. . . .

Pasemos ahora a referirnos a uno de los más grandes descubrimientos en el análisis matemático del siglo XIX, debido a Poincaré, descubrimiento que bastaría por sí solo para inmortalizar a un nombre. Tal descubrimiento es el de las funciones fuchsianas o automorfas. Demás está decir que serían necesarios varios largos cursos para referirse a los teoremas, conceptos, etc., que, partiendo de las integrales elípticas, y, siguiendo con las funciones elípticas, abelianas, etc., culminaron en el descubrimiento aludido y en otros, también de singular importancia.

Habría que referirse a las integrales elípticas, integrales hiperelípticas, integrales abelianas, funciones elípticas, funciones modulares elípticas, funciones abelianas, funciones fuchsianas, funciones kleinianas, funciones thétafuchsianas, funciones zétafuchsianas, trascendentes de Picard, funciones hiperfuchsianas de Picard, etc.

Antes de referirnos a las funciones fuchsianas digamos algunas palabras sobre las funciones modulares elípticas. Palabras que se justifican no solamente porque las funciones fuchsianas son una generalización de las funciones modulares, sino también porque una de las más simples de éstas condujeron a Picard al descubrimiento de sus dos célebres teoremas sobre las funciones trascendentas enteras y las funciones uniformes con punto singular esencial aislado, de los que nos ocuparemos más adelante.

Una clase muy importante de funciones analíticas uniformes que encierran como caso particular a la clase de las funciones modulares elípticas, y que, a su vez están incluídas, como caso particu-

lar, dentro de la clase de las funciones fuchsianas (o automorfas) de Poincaré, es la de las funciones de Schwarz. (Estas funciones de Schwarz tienen interesantísimas aplicaciones, por ejemplo, en la teoría de las funciones subarmónicas). A su vez, la clase de las funciones fuchsianas, de Poincaré, está incluída, como caso particular, dentro de *una cierta clase de funciones analíticas uniformes.* No siendo esta conferencia el lugar indicado para hablar de tal generalización, en la cual intervienen funciones *uniformes,* dejemos para otra oportunidad el ocuparnos de la generalización aludida.

En esta conferencia nos limitaremos a las *funciones modulares elípticas algebraicas.*

Tales funciones gozan de notables propiedades (muy numerosas y elegantes), y su potencia es tal que, tienen variadísimas aplicaciones en diversos capítulos del análisis matemático, teoría de números, álgebra, etc.

Otra función modular elíptica muy útil es el cuadrado

$$k^2 \equiv k^2(\tau)$$

del módulo de Legendre; y, precisamente: en el orden histórico es la primera función modular estudiada. De aquí: el calificativo *modular* adjudicado a esta categoría de funciones.

Recordemos que: el módulo de la integral elíptica de primera especie de Legendre satisface a la relación

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3},$$

y el módulo complementario, k', a la relación:

$$k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3},$$

siendo:

$$\left.\begin{aligned} e_1 &\equiv p(\omega) \\ e_2 &\equiv p(\omega + \omega') \\ e_3 &\equiv p(\omega') \end{aligned}\right\}$$

(indicando con p la conocida función elíptica de Weierstrass).

Las tres funciones elípticas de Jacobi,

$$sn\, v, \quad cn\, v, \quad dn\, v,$$

(siendo:

$$v \equiv u \,.\, \sqrt{e_1 - e_3}) \,,$$

dependen racionalmente del cuadrado, k^2, del módulo, como la función elíptica de Weierstrass

$$p\,(u; g_2, g_3)$$

de los invariantes g_2, y, g_3.

(Pero recuérdese que: los invariantes g_2, y, g_3 se calculan siempre racionalmente, como invariantes de una cierta forma bicuadrática). (Y ya que estamos en esto, enunciemos una propiedad original sobre estas tres funciones elípticas de Jacobi: los índices de Tchebycheff-Hermite de las funciones

$$sn\, v, \; cn\, v, \quad \text{y}, \quad dn\, v,$$

son finitos. Esta propiedad original y la recordada hace un instante son útiles para establecer cierto teorema muy importante).

De las expresiones anteriores de los módulos k^2, y, k'^2, en función de e_1, e_2, e_3, y de la expresión del invariante absoluto λ en función de los invariantes g_2, y, g_3 se infiere:

$$4 \,.\, (1 - k^2 + k^4)^3 - 27 \,.\, \lambda \,.\, k^4 \,.\, (1 - k^2)^2 = 0 \,;$$

de esta ecuación y recordando que k^2 es uniforme respecto de τ, se deduce que:

$$k^2 \equiv k^2\,(\tau)$$

es una función modular elíptica (algebraica).

(La anterior ecuación algebraica entre λ y k^2, define una riemanniana, tomando como variables λ y k^2, de género nulo, con seis hojas que se ramifican: para $\lambda = 0$ tres a tres, para $\lambda = 1$ dos a dos y análogamente para $\lambda = \infty$).

De todas las funciones modulares, como hemos dicho, la más simple es el invariante absoluto, λ. Así, por ejemplo, una de las razones por las cuales λ es más simple, como función modular, que k^2,

estriba en el siguiente hecho: la función $\lambda(\tau)$ es automorfa (o fuchsiana) respecto del grupo modular; en cambio, la función $k^2(\tau)$ es solamente automorfa respecto de un cierto subgrupo del grupo modular, (aplicando a la variable independiente τ una sustitución arbitraria del grupo modular que no pertenezca al subgrupo de automorfía de $k^2(\tau)$, esta función está sometida a las sustituciones del grupo anarmónico). (Digamos de paso que: las tres funciones elípticas de Jacobi, *sn, cn, dn,* son automorfas respecto del grupo reproductivo o de automorfía de la función modular $k^2(\tau)$, grupo, que como acabamos de establecer, es un cierto subgrupo del grupo modular. El grupo modular es infinito, discontinuo y no contiene sustituciones infinitesimales. La discontinuidad propia del grupo modular es corolario de un teorema de Poincaré, según el cual, todo grupo de sustituciones lineales con coeficientes reales, y que no contenga sustituciones infinitesimales, es discontinuo propiamente en el campo complejo.

Evidentemente, el conjunto de las infinitas determinaciones de la función inversa de cualquier función modular elíptica trascendente es numerable; y esta propiedad (de numerabilidad) es también válida para las funciones fuchsianas, (que generalizan las modulares).

Las propiedades de esta función inversa permitieron a Picard descubrir sus dos célebres teoremas, sobre las funciones trascendentes enteras (primer teorema de Picard), y, sobre las funciones analíticas uniformes con punto singular esencial aislado (segundo teorema de Picard). Claro está que, para las demostraciones de estos dos teoremas de Picard se puede utilizar en lugar de la función inversa de la función modular elíptica

$$\lambda'' \equiv \lambda(\tau);$$

la función inversa de una función modular elíptica algebraica cualquiera, como ser:

$$k^2 \equiv k^2(\tau);$$

o:

$$\sqrt[n]{k^2(\tau)}, \quad (n \text{ número natural});$$

o:

$$\sqrt[n]{1-k^2(\tau)} \equiv \sqrt[n]{1-k^2} = \sqrt[n]{k'^2(\tau)}; \quad (n \text{ número natural arbitrario}),$$

siendo: k^2 el cuadrado del módulo de la integral elíptica de primera especie de la forma normal o canónica de Legendre, y: $k'^2 = 1 - k^2$, el cuadrado del *módulo complementario*, k', a saber:

$$k' = dn\, K = \frac{\sigma_2(\omega_1)}{\sigma_3(\omega_1)};$$

o:

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt[4]{k(\tau)};$$

o:

$$\sqrt[4]{k'} = \sqrt[4]{k'(\tau)};$$

etc., etc.

Téngase en cuenta, para la demostración de esta afirmación, entre otras propiedades de las funciones modulares elípticas algebraicas, el teorema de ramificación de Klein, el cual enunciaremos en seguida, después de esta disgresión.

Más aún, para las demostraciones de los dos mencionados teoremas de Picard se puede utilizar en lugar de la función inversa de una función modular elíptica algebraica arbitrariamente fijada, la función inversa de una función fuchsiana cualquiera; así como la función inversa de una función modular elíptica trascendente cualquiera; y también, naturalmente, la función inversa de una arbitraria función de Schwarz.

Y antes de cerrar esta disgresión, señalemos una propiedad interesante relativa a la función inversa de una función modular elíptica algebraica o trascendente cualquiera, propiedad que aplicada a la inversa de $k^2 \equiv k^2(\tau)$, es útil en la formulación que dió Caratheodory del teorema de Landau, generalización del primer teorema de Picard, referente a las funciones holomorfas en un círculo y que no toman en su interior dos valores, finitos, prefijados; teorema que Landau descubrió estrechando las mayoraciones en la demostración « elemental » dada por Borel del mencionado primer teorema de Picard.

Veamos tal propiedad: Sea

$$f \equiv f(\tau)$$

una función modular elíptica, algebraica o trascendente, cualquiera, y:

$$g_1(f), \quad g_2(f), \ldots, g_n(f), \ldots,$$

las determinaciones de la función inversa

$$\tau = g_n(f) ;$$

e indiquemos con:

$$I\,\alpha$$

el coeficiente de la unidad imaginaria, *i*, en el número complejo α.

He aquí, la propiedad: En todo punto

$$f$$

regular para las determinaciones

$$g_n(f) ,$$

en el cual es:

$$\frac{dg_n(f)}{df} \neq 0 ,$$

se verifica que: la expresión

$$\frac{I\,g_n(f)}{\left|\frac{d\,g_n(f)}{df}\right|} = I\,g_n\,.\,(f)\,.\left|\frac{df}{dg_n(f)}\right|$$

es independiente del sub-índice n.

Esta propiedad, *mutatis mutandis*, también vale para la inversa de una función fuchsiana cualquiera y, claro está, para las funciones de Schwarz.

Otra manera de enunciar tal propiedad es la siguiente: Sean

$$f = f(\tau)$$

una función modular elíptica, algebraica o trascendente, cualquiera o una función de Schwarz cualquiera o una fuchsiana cualquiera, y

$$\tau_1 , \quad \tau_2$$

un par de puntos equivalentes respecto del grupo de automorfía de la función

$$f(\tau) .$$

En tales hipótesis, se verifica:

$$|f'(\tau_1)| \, . \, |I\tau_1| = |f'(\tau_2)| \, . \, |I\tau_2)| \, ,$$

es decir, la expresión

$$|f'(\tau_n)| \, . \, |I\tau_n|$$

es independiente del sub-índice n, indicando con

$$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_n, \ldots,$$

un sistema de puntos equivalentes respecto del grupo reproductivo (o de automorfía) de la función

$$f(\tau),$$

fuchsiana cualquiera.

Es interesante, y por otra parte sencillo, obtener un teorema que generaliza a éste, y, en el cual intervienen las derivadas sucesivas. El anterior teorema directo, y su generalización aludida, es susceptible de extenderse, *mutatis mutandis,* a las funciones hiperfuchsianas de Picard, en especial, a las que provienen de las series hipergeométricas de dos variables independientes.

De este teorema directo, así como de sus generalizaciones a las funciones de Schwarz, a las funciones fuchsianas de Poincaré, y a las funciones hiperfuchsianas de Picard, se pueden deducir interesantes propiedades, las que no señalamos aquí, por creerlo que sería inoportuno.

. . . .

La teoría de las *ecuaciones modulares elípticas* constituye uno los capítulos más atrayentes del análisis matemático superior, y en la cual el genio de Hermite hizo memorables descubrimientos.

Así, por ejemplo, en una célebre memoria publicada en el año 1858, en los *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* Hermite resolvió empleando funciones modulares elípticas (y apoyándose en un famoso teorema descubierto por Galois y demostrado por Betti), *la ecuación algebraica general de quinto grado.*

El método de Hermite (que luego fué perfeccionado y simplificado por Kronecker, Brioschi, y especialmente por Klein en sus admirables *Lecciones sobre el icosaedro*), utilizando ciertas transforma-

ciones de Bring y de Jerrard, reduce la solución de la ecuación algebraica general de quinto grado a la división, o multiplicación, por *5* del argumento de una función modular, en manera *análoga* a como el método trigonométrico para resolver la ecuación de tercer grado, reduce la solución de esta última ecuación a la división o multiplicación por *3* del argumento de una función goniométrica.

Se presenta, ahora, el siguiente problema: obtener condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación algebraica de grado n sea resoluble mediante funciones modulares elípticas algebraicas. Este problema (del cual nos ocuparemos en otro momento), a pesar de naturaleza distinta a la del resuelto por Galois (que da la condición necesaria y suficiente para que una ecuación algebraica de grado n sea resoluble mediante radicales), se puede resolver, sin embargo, aplicando nociones inspiradas en las del genial geómetra francés. (Limitémosnos, aquí, a señalar que: es fácil ver que toda ecuación algebraica de primer grado, o de segundo grado, o de tercer grado, o de cuarto grado, es resoluble mediante funciones modulares elípticas algebraicas. Teniendo en cuenta esta observación original y el resultado de Hermite, se puede enunciar el teorema siguiente: la ecuación algebraica *general* de grado n, siendo:

$$n = 1\;;\quad \text{o}\quad n = 2\;;\quad \text{o}\quad n = 3\;;\quad \text{o}\quad n = 4\;;\quad \text{o}\quad n = 5,$$

es resoluble mediante funciones modulares elípticas algebraicas).

Digamos, ahora, que existe una *cierta clase de funciones fuchsianas* que poseen una propiedad que puede considerarse *análoga* a la propiedad de las funciones modulares elípticas algebraicas en la cual se apoyó Hermite para resolver la ecuación algebraica general de quinto grado. Este hecho alimenta la esperanza de llegar a resolver *ecuaciones algebraicas generales de grado superior, en sentido estricto, al quinto.*

Independientemente de esto último, se plantea el siguiente problema: fijada una sub-clase de funciones fuchsianas, obtener condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación algebraica de grado $n \geqq 6$ sea resoluble mediante funciones fuchsianas pertenecientes a la sub-clase prefijada.

Retornemos un instante, luego de esta disgresión, al teorema anterior que da una condición suficiente para que una curva sea algebraica. Como dijimos, dicho teorema se puede demostrar directa-

mente, o bien, deducirlo de la teoría de las ecuaciones modulares elípticas. Agreguemos, ahora, que tal teorema es, en realidad, una consecuencia inmediata del célebre teorema de Poincaré, según el cual: si dos funciones fuchsianas son invariables respecto de un mismo grupo de sustituciones lineales, dichas funciones fuchsianas están ligadas entre sí algebraicamente. (No es necesario, para la validez del teorema anterior, que el grupo de sustituciones lineales, operadas sobre la variable independiente, sea el grupo correspondiente o reproductivo o de automorfía de ninguna de las dos funciones fuchsianas). Del teorema anterior de Poincaré surge como corolario simple e interesante que: si dos funciones fuchsianas son invariables respectoto de cualquier subgrupo del grupo de una tercera función fuchsiana (arbitraria), entonces, estas tres funciones fuchsianas están ligadas, entre sí, dos a dos, algebraicamente.

Si en el teorema anterior de Poincaré (que es la generalización a las funciones fuchsianas de un conocido teorema elemental relativo a las funciones elípticas), se toman todos los pares posibles de funciones fuchsianas se obtienen todas las curvas algebraicas; es decir, se verifica el siguiente teorema de capital importancia, debido al genio de Poincaré: toda curva algebraica propiamente dicha (es decir, no degenerada en otras curvas algebraicas de grados menores, en sentido estricto, que el grado de la curva algebraica arbitrariamente tomada) es uniformizable mediante funciones fuchsianas. Claro está, que: las funciones fuchsianas que uniformizan una curva algebraica, pueden reducirse a funciones modulares elípticas, algebraicas o trascendentes, o bien, a funciones de Schwarz.

Es fácil ver, de inmediato, (claro está, sin apoyarse en el teorema de Poincaré que acabamos de recordar), que se verifican las dos siguientes propiedades:

a) toda curva algebraica, propiamente dicha, cuyo género es igual a cero, (unicursal), es uniformizable mediante funciones modulares elípticas algebraicas, y, tal uniformización se puede lograr de infinitas maneras, (claro está que: la uniformización *específica*, permítasenos el término, de una curva algebraica de género nulo, es la realizada mediante funciones racionales de un parámetro; y:

b) toda curva algebraica, propiamente dicha, cuyo género es igual a uno, (elíptica), es, también, uniformizable mediante funciones modulares elípticas algebraicas, y, tal uniformización se puede lograr de infinitas maneras, (y, también, claro está que la uni-

formización *específica* de una curva algebraica cuyo género es igual a la unidad, es la realizada mediante funciones meromorfas doblemente periódicas de un parámetro, es decir, mediante funciones elípticas de un parámetro).

Es decir, el teorema de Poincaré tiene validez universal, a saber: toda curva algebraica, propiamente dicha, *cualquiera que sea el valor de su género,* es uniformizable mediante funciones fuchsianas de un cierto parámetro.

. . . .

BIBLIOGRAFÍA

ARGENTINA, REPÚBLICA. INSTITUTO NACIONAL DE LA NUTRICIÓN. *Tablas del valor vitamínico de productos vegetales comestibles.* Un foll. in-8º, 53 pág. Buenos Aires, 1945 (m$n 2,50).

El interesante trabajo que se menciona en el epígrafe, constituye otra valiosa contribución de la institución que desde 1938, en que fuera creada, ha encarado muy seriamente el estudio de los distintos alimentos producidos en el país y cuya primera publicación de conjunto - *Tabla de la Composición Química de los Alimentos. Materias primas y preparaciones alimenticias* - fuera efectuada en 1942.

Comienza el folleto, con la descripción del método seguido en la determinación de las distintas vitaminas que se analizan: carotina (A), tiamina (B_1), riboflavina (B_2), ácido nicotínico (G o PP) y ácido ascórbico (C), para dar, seguidamente, las tablas correspondientes, las cuales consideran los distintos productos vegetales comestibles divididos en dos grupos. El primero de ellos incluye a todos esos productos, exceptuando las frutas, que se tratan por separado en el otro grupo. El total de las determinaciones efectuadas para los dos grupos suman 428; esto dará una idea del volumen de la labor desarrollada.

En estas tablas se consigna, a más del nombre corriente, con el equivalente en latín, para evitar las posibles confusiones derivadas de la terminología vulgar, que podría ser común a distintas especies vegetales, el estado del alimento (fresco, cocido, etc.), la variedad — en algunos casos —, origen de la muestra, parte analizada y, por último, el contenido en las vitaminas mencionadas por cada 100 gramos y en las unidades conocidas.

Un conjunto de 9 cuadros, que interesan para el cálculo del valor vitamínico de los vegetales utilizables en la alimentación corriente, se agrega al final y en ellos se dividen los que pertenecen al primer grupo en tres categorías, según el contenido en hidratos de carbono y las frutas en dos, cítricas y no cítricas. Como el régimen alimentario varía en las distintas épocas del año, este aspecto ha sido también objeto de estudio.

El trabajo, de cuyo contenido hemos tratado de informar brevemente al lector, es, en verdad, valiosísimo, no sólo para el lego en la materia, ya que contribuirá a aclarar los conceptos, muchas veces difundidos erróneamente, que sobre la presencia de distintas vitaminas y su riqueza se tiene, sino también para el técnico o iniciado en tales problemas, al presentar, en una sola publicación, ese conjunto de determinaciones que cubre todos los productos vegetales comestibles, estando por completarse las que se refieren a otros géneros alimentarios.

El Instituto Nacional de la Nutrición ha publicado, además, un catálogo en el cual se encontrará, a través de sus 36 páginas, toda la producción del mismo: publicaciones científicas, de divulgación, de enseñanza, etc., y en algunos casos un breve sumario. Estas publicaciones pueden adquirirse en la División Acción Educativa de dicho Instituto, Pueyrredón 2423, Buenos Aires.

M. R. Rossi.

María Serrallach. *Bibliografía Química.* — Un tomo, 358 pág., 1946 (Distribuidor: José Bosch, Barcelona).

Con un prólogo del Dr. José P. Vila. La obra ha sido escrita con criterio práctico y trata de facilitar las tareas inherentes a la búsqueda bibliográfica química. En el primer capítulo se expone una lista de obras seleccionadas, correspondientes a las diversas ramas de la química pura y aplicada. Posiblemente, en una futura edición, la autora pueda completar esta lista con las últimas ediciones actuales de obras ya mencionadas aquí; y con otras obras de reciente aparición y que puedan considerarse importantes. Pero, de cualquier modo, más de cincuenta páginas están dedicadas a esta parte y con un buen criterio de selección; lo que significa que se dispone de un correcto conjunto informativo. Se completa esta parte con listas de colecciones monográficas; de obras relativas a patentes; de editoriales y libreros de varios países.

A continuación se indican las fuentes bibliográficas fundamentales: Obras y Revistas; tanto Revistas de Indice (Cremisches Zentralblatt, Chemical Abstracts, etc.), como Revistas especializadas. Luego, las abreviaturas más empleadas, correspondientes a las más importantes revistas; tablas sinópticas de correspondencia entre los tomos y los años, de las principales revistas; significación de abreviaturas alemanas e inglesas (y de un conjunto seleccionado de términos correspondientes a estos idiomas). El capítulo VI, es un catálogo de revistas de química existentes en las bibliotecas de Barcelona. Finalmente, existe un Indice general de autores, revistas, empresas, etc., relacionadas con la materia.

En resumen, esta obra ha de prestar sus provechosos servicios, no sólo en el sentido local — por las informaciones que particularmente interesan en la ciudad y país de su edición — sino dentro del dominio del idioma castellano, en cuanto a un cúmulo interesante y bien ordenado de datos necesarios, a los cultores e investigadores de las ciencias químicas.

R. V.

I. Nechaev. *Chemical Elements.* — Un tomo, 151 pág., 2ª edición, 1946. (Editor: Lindsay Drumond, Ltd. London).

Interesante obra de vulgarización, donde se da una breve reseña de la historia del descubrimiento de los principales elementos de la química y las primitivas experimentaciones de los fundadores de la ciencia moderna. Comienza con la descripción de las interesantes experienicas de Scheele, para continuar con los principales trabajos de Lavoisier, y algunos de los subsiguientes sabios, hasta llegar al descubrimiento realizado por los esposos Curie.

Los seis capítulos en que está dividido este volumen, tratan sobre: el aire, la química y la electricidad (con referencia a la pila de Volta y amplia consideración de las experiencias de Davy); la luz (y sus relaciones con el descubrimiento de algunos elementos; con mención de los trabajos de Kirchhoff y Newton); la clasificación periódica de Mendeleyev; los gases nobles y los rayos invisibles (con los trabajos de Roentgen y Curie). Numerosas ilustraciones (tipo fotográfico) completan el texto.

Dentro del marco que le corresponde, con lenguaje sencillo, familiar y bien accesible para quienes apenas tengan una base elemental científica, la obra es recomendable y constituye una buena contribución para la divulgación de hechos históricos, y hasta para formar criterio básico en lo que se refiere a cómo nació la química moderna.

R. V.

H. T. Openshaw. *A Laboratory Manual of Qualitative Organic Analysis.* — Un tomo, 94 pág., 1946. (Editor: Cambridge - At the University Press).

Este pequeño volumen está destinado a estudiantes de química orgánica; tratando lo que se refiere a la identificación de los tipos más comunes de compuestos de ese tipo. Evidentemente, no puede pretenderse, dentro del marco de este trabajo, un tratamiento suficientemente amplio del asunto, como para que se dé resolución a muchos problemas que se presentan en la práctica diaria del laboratorio; máxime si se considera la enorme complejidad de muchos casos. Pero, considerando la obra con el criterio que ha tenido su autor — tal como lo expone en el Prefacio — debe reconocerse que cumple debidamente con sus propósitos. En efecto, con un plan desarrollado sistemáticamente, se exponen las etapas sucesivas conducentes a la identificación de los compuestos: Ensayos simples de análisis elemental (que no serán suficientes en diversos casos, en que se exigirán métodos más rigurosos); consideración de compuestos con carbono, hidrógeno, oxígeno (únicamente); luego, sustancias con azufre y con halógenos; separación de mezclas por medios químicos; preparación de derivados, para llegar a la identificación, mediante el estudio de sus propiedades (nitración, bromuración, oxidación); tratamiento particular de algunos grupos de sustancias (ácidos carboxílicos; ésteres, aminas, compuestos aromáticos, etc.).

Digno de mención es el hecho de la exitencia de un adecuado número de referencias bibliográficas originales y de obras de consulta; así como de cuadros de constantes. Como obra de iniciación en el análisis orgánico es recomendable, por cuanto contiene lo indispensable y fundamental para lo que podríamos llamar un primer curso (un semestre) de prácticas de esta naturaleza, con todas las posibles ampliaciones que derivan de las consultas a las citas bibliográficas seleccionadas que se mencionan en los lugares correspondientes.

R. V.

Henry T. F. Rhodes. *Forensic Chemistry.* — Un tomo, 164 pág., 2ª edición, 1946. (Editor: Chapman & Hall Ltd., London).

Esta obra, de química legal, trata los aspectos fundamentales que pueden presentarse al químico en el estudio de problemas de este tipo. En la primera parte se considera lo que tiene atingencia con la « identificación de la persona ».

(directa o indirectamente); la segunda parte trata de la aplicación de los métodos químicos, para la prueba del *corpus delicti*. A esta última se le dedica la mayor porción del texto y comprende: manchas; armas; explosivos; documentos; monedas falsas; agentes tóxicos). Los capítulos referentes a manchas y polvos, y agentes tóxicos, son los que presentan mayores modificaciones y ampliaciones, con respecto a la primera edición; debiendo mencionarse la importancia que el autor da ahora a los métodos microquímicos que, en rigor, son los únicos que en muchos casos pueden aplicarse. Alrededor de doscientas citas bibliográficas permitirán completar la información, respecto de asuntos relacionados con las investigaciones químico-legales.

Uno de los valores de la obra reside en la precisión que el autor emplea en la descripción de las diversas técnicas operatorias. Esto es consecuencia de la experiencia personal del mismo y constituye una garantía en cuanto a la seguridad de trabajo para quien aplique esas directivas. En otros casos, los temas se tratan sintéticamente y, naturalmente, será necesario completar la información con la consulta de tratados del análisis químico o de revistas especializadas, de lo cual se tiene un buen conjunto de referencias en la ya indicada lista bibliográfica.

Otro de los aspectos recomendables, se relaciona con el criterio de interpretación de los resultados obtenidos por los métodos prácticos empleados. En este sentido no escapará a quienes se ocupan de esta especialidad, de la valiosa ayuda que significa una opinión autorizada en la resolución de problemas que pueden presentarse con aspectos sumamente graves. El autor es miembro correspondiente de la Academia Internacional de Criminología.

R. V.

INDICE GENERAL

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN EL TOMO CIENTO CUATRIGÉSIMO TERCERO